Colles de Maths - semaine 13 - MP*2
Lycée du Parc

Julien Allasia - ENS de Lyon

Exercice 1 Soit p un nombre premier.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,
$$\nu_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor .$$
2. Déterminer le nombre de 0 à la fin de l'écriture décimale de l'entier 100!.

Exercice 2 Quels sont les groupes qui possèdent un nombre fini de sous-groupes ?

Exercice 3

1. Soit G un groupe fini tel que $\forall x \in G,\ x^2 = e$. Montrer que l'ordre de G est une puissance de 2.
Indication : On pourra commencer par montrer que G est abélien.
2. En déduire que tout groupe d'ordre $2p$ avec p premier possède un élément d'ordre p.

Exercice 4

1. Soit G un groupe abélien fini. Montrer qu'il existe un élément de G dont l'ordre est le ppcm des ordres des éléments de G.
2. En déduire que si K est un corps, tout sous-groupe fini de K^* est cyclique.

Exercice 5 Soit K un corps et G un sous-groupe fini de K^*. Dénombrer l'ensemble des éléments de G d'ordre d pour tout d diviseur de $|G|$, et en déduire que G est cyclique.

Exercice 6 Soit G un groupe abélien fini et H un sous-groupe de G. Soit $\chi : H \to \mathbb{C}^*$ un morphisme de groupes. Montrer que χ se prolonge en un morphisme de groupe $\tilde{\chi} : G \to \mathbb{C}^*$.

Exercice 7 Soit A un anneau intègre fini. Montrer que A est un corps.

Exercice 8 Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On pose
$$\Phi_d = \prod_{1 \leqslant k \leqslant d,\ k \wedge d = 1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{d}} \right).$$
Montrer que pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, $\Phi_d \in \mathbb{Z}[X]$.